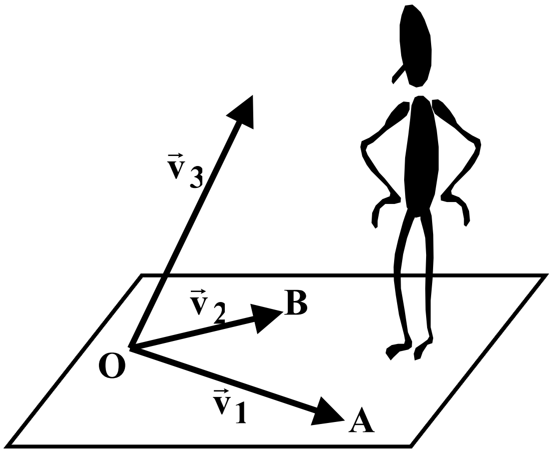
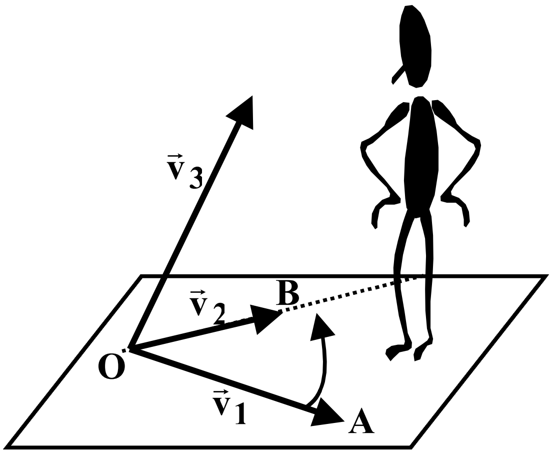
2.2 Produto Vetorial

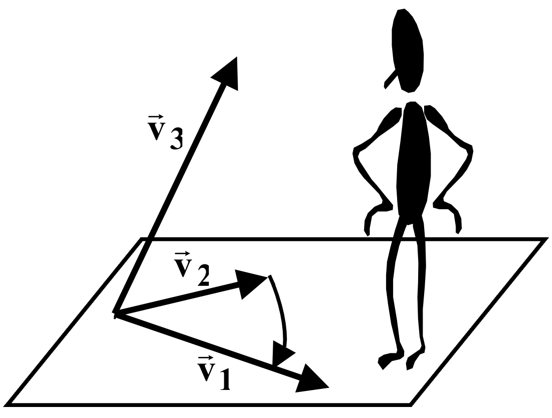
Para definirmos o produto vetorial entre dois vetores é indispensável distinguirmos o que são **bases positivas** e **bases negativas**. Para isso, consideremos uma base do espaço $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e um observador. Este observador deve estar com os pés em um plano que contém representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (os dois primeiros vetores da base), de modo que $\vec{v}_3$ (o terceiro vetor da base), esteja dirigido para os seus olhos. Neste plano, sejam $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_2$.

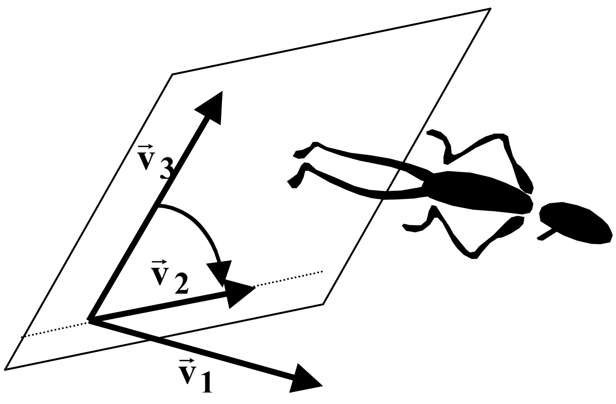


Consideremos agora, a rotação de menor ângulo em torno de O, que torna o vetor $\vec{v}_1$(o primeiro vetor da base) com mesmo sentido do vetor $\vec{v}_2$(o segundo vetor da base). Se esta rotação for no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, dizemos que a base é **positiva**. Caso contrário, dizemos que a base é **negativa**. Assim, a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, ilustrada ao lado, é positiva.



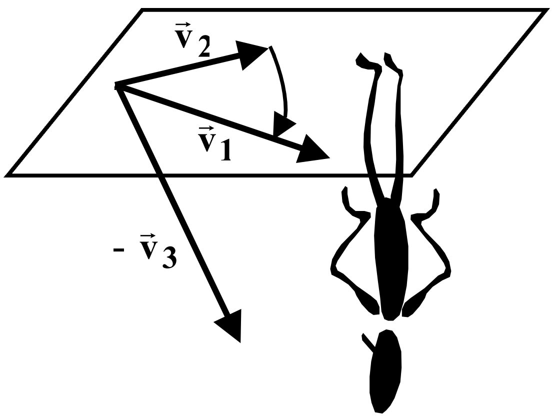
Observemos que as bases $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ e $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ são negativas.





Chamamos atenção especial do leitor para o fato de que nem sempre o observador está no mesmo semi-espaço que nós. Consequentemente, o sentido da rotação que ele verá é contrário ao que nós vemos. Para ilustrar este fato, desenhe em uma folha de papel dois vetores LI com a mesma origem e considere uma rotação que torna um deles com mesmo sentido do outro. A folha de papel pode ser considerada com um plano, assim, a folha de papel divide o espaço em dois semi-espaços. Observemos então que, em um desses semi-espaços vemos esta rotação com um sentido. Se mudarmos de semi-espaço vemos esta rotação com um sentido contrário ao anterior.

A observação anterior é útil na identificação de bases positivas e negativas, quando o observador não está no mesmo semi-espaço que nós. Por exemplo, ao analizarmos a base $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, -\vec{v}_3\}$ vemos a rotação no sentido horário, porém o observador, por estar no semi-espaço distinto do qual nos encontramos, vê esta rotação no sentido anti-horário e portanto esta base é positiva.

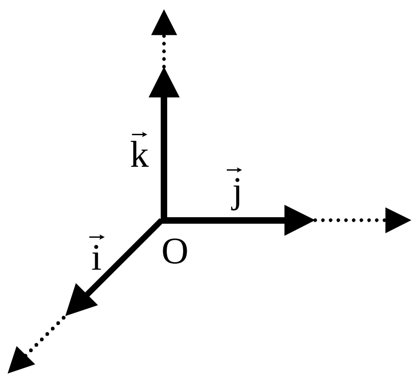


Exemplos

Consideremos o sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representado a seguir, temos que:

1. As bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\}$ são positivas.

2. As bases $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$, $\{\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\}$ são negativas.



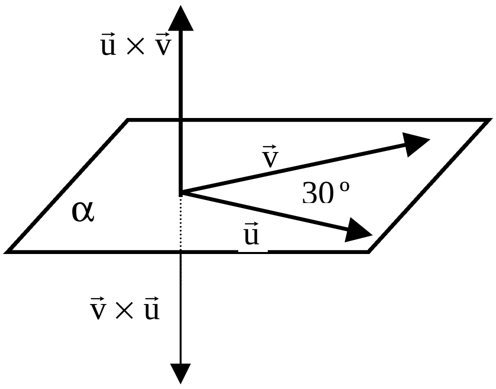
Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não colineares. **O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$**, indicado $\vec{u}\times\vec{v}$, é um vetor, tal que:

1. $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}(\vec{u},\vec{v})$;
2. A direção de $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
3. A base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ é positiva.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares então $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{o}$.

Exemplo 2

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores com representantes no plano α, onde $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=\sqrt{3}$ e $(\vec{u},\vec{v})=30^{\circ}$. Temos:



$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,30^{\circ} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

e

$$|\vec{v}\times\vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}|\,\text{sen}\,30^{\circ} = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Assim, $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{v}\times\vec{u}|$, mas $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ são vetores opostos, como ilustra a figura.

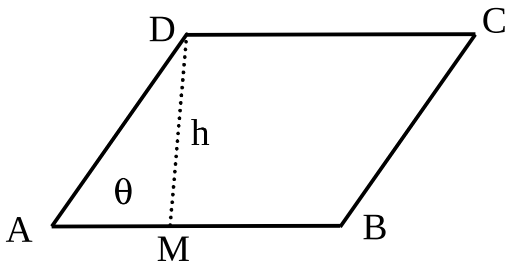
Exemplo 3

Dada a base ortonormal positiva $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, temos :

1. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{o}$
2. $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$
3. $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

Interpretação geométrica do produto vetorial

Consideremos o paralelogramo ABCD, abaixo.



Sabemos que a área S desse paralelogramo é:
S = base × altura, ou seja $S = |\vec{AB}| \cdot h$.
Do triângulo AMD, temos:

$$h = |\vec{AD}| \cdot \operatorname{sen}\theta .$$

Daí segue que, $\boxed{S = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \operatorname{sen}\theta = |\vec{AB} \times \vec{AD}|}$.

Observamos também que a área T do triângulo ABD é:

$$\boxed{T = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2}}$$

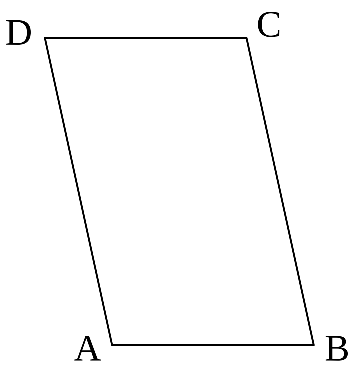
Exemplo 4:

Consideremos o paralelogramo ao lado, onde $A(1,1,0), B(0,1,2)$ e $C(4,1,0)$, temos:

$|\vec{AB}| = |(-1,0,2)| = \sqrt{5}$ e $|\vec{AD}| = |(4,0,-2)| = 2\sqrt{5}$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}(\vec{AB}, \vec{AD}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$



Segue daí que a área S do paralelogramo ABCD é:

$$S = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ u.a.}$$

Propriedades do produto vetorial

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$.
2. $(t\,\vec{v})\times\vec{u} = \vec{v}\times(t\,\vec{u}) = t\,(\vec{v}\times\vec{u})$.
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer e t um número real. As propriedades 1 e 2 decorrem diretamente da definição de produto vetorial, e a prova da propriedade 3 será feita no parágrafo seguinte.

Expressão cartesiana do produto vetorial

Fixada uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (x_1x_2)\,\vec{i}\times\vec{i} + (x_1y_2)\,\vec{i}\times\vec{j} + (x_1z_2)\,\vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+ (y_1x_2)\,\vec{j}\times\vec{i} + (y_1y_2)\,\vec{j}\times\vec{j} + (y_1z_2)\,\vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ (z_1x_2)\,\vec{k}\times\vec{i} + (z_1y_2)\,\vec{k}\times\vec{j} + (z_1z_2)\,\vec{k}\times\vec{k}\,.$$

Podemos então escrever:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\vec{k}.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma de um determinante "simbólico":

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(3,1,2)$ e $\vec{w}=(2,4,6)$, temos:

1) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(4-3)\,\vec{i}-(2-9)\,\vec{j}+(1-6)\,\vec{k},$

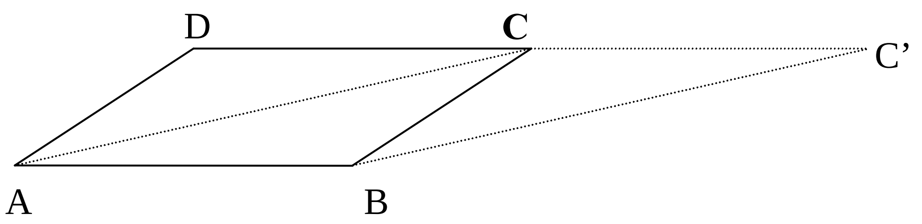
Daí, $\vec{u}\times\vec{v}=(1,7,-5)$.

2) $\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}=(12-12)\,\vec{i}+(6-6)\,\vec{j}+(4-4)\,\vec{k}\,.$

Daí, $\vec{u}\times\vec{w}=(0,0,0)=\vec{o}$.

Exemplo 6

Consideremos, na figura a seguir, os paralelogramos ABCD e ABC'C.



Se S e S' são as áreas dos paralelogramos ABCD e ABC'C, respectivamente. Temos:

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|\quad \text{e} \quad S'=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

Como

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=|\vec{o}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|,$$

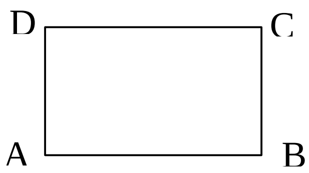
podemos concluir que: $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=S'$.

Considerando T a área do triângulo ABC temos:

$$T=\frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2}=\frac{|\vec{AB}\times\vec{BC}|}{2}=\frac{|\vec{AC}\times\vec{BC}|}{2}$$

Exemplo 7:

Considerando S a área o retângulo ao lado, onde



$A(1,0,2), C(-2,3,3)$ e $\vec{AB}^{\circ}=(-1,0,0)$ temos:

$S=|\vec{AB}\times\vec{AC}|$ e $\vec{AC}=(-3,3,1)$.

Como $\vec{AB}\perp\vec{BC}$, temos que $\vec{AB}=\text{proj}_{\vec{AB}^{\circ}}\vec{AC}=(-3,0,0)$.

Daí $S=|(-3,3,1)\times(-3,0,0)|=|(0,-3,9)|=\sqrt{9+81}=3\sqrt{10}.$

2.3 Produto Misto

Definição: Sejam $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer. **O produto misto dos vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$**, indicado por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, é o número real $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Exemplo 1:

Dados os vetores $\vec{u}=(1,0,2),\vec{v}=(-1,1,3)$ e $\vec{w}=(0,3,-2)$, temos:

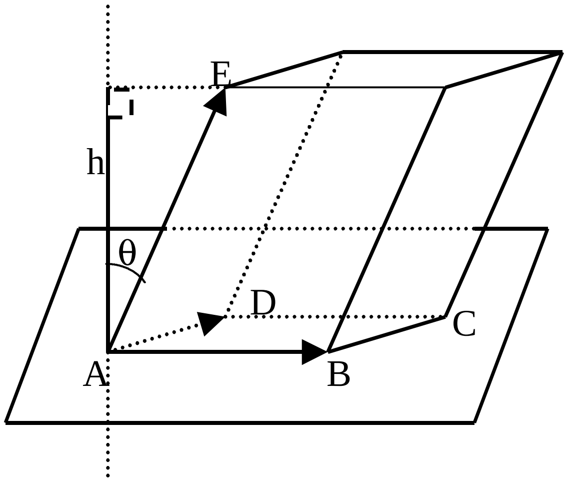
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[(1,0,2)\times(-1,1,3)]\cdot(0,3,-2)=(-2,-5,1)\cdot(0,3,-2)=-17$

$[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=[(-1,1,3)\times(1,0,2)]\cdot(0,3,-2)=(2,5,-1)\cdot(0,3,-2)=17$.

Interpretação geométrica do produto misto

Seja o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE. Sabemos que o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}.$$



Considerando a altura h desse paralelepípedo, em relação à base ABCD e aplicando nossos conhecimentos do cálculo vetorial podemos escrever: $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}|\, h$.

Por outro lado, essa altura pode ser calculada como o módulo da projeção do vetor $\vec{AE}$ na direção do vetor $\vec{AB} \times \vec{AD}$, pois a direção deste vetor é ortogonal ao plano ABC. Assim podemos escrever:

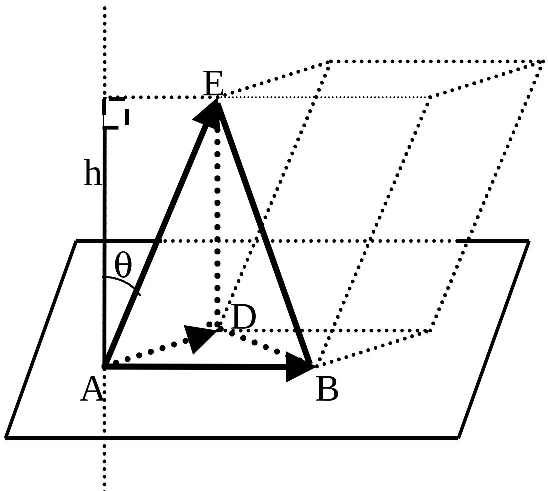
$$h = |\ proj_{(\vec{AB} \times \vec{AD})} \vec{AE}\,| = |\,\vec{AE} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD})^{\circ}\,| = ||\,\vec{AE}\,|\cos\theta\,| = |\,\vec{AE}\,||\cos\theta\,|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{AE}$ e $\vec{AB} \times \vec{AD}$.

Daí, $V = |\,\vec{AB} \times \vec{AD}\,||\,\vec{AE}\,||\cos\theta\,| = |\,(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}\,| = |\,[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]\,|$, ou seja,

$$\boxed{V = |\,[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]\,|}$$

Consideremos agora o tetraedro de arestas AB, AD e AE. Seja V_T o volume desse tetraedro, assim, $V_T = \frac{1}{3}\,\text{área da base} \times \text{altura}$.



Considerando a base ABD desse tetraedro, observemos que a altura relativa a essa base coincide com a altura do paralelepípedo anterior.

Daí podemos escrever:

$$V_T = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(\vec{AB}\times\vec{AD})\right|\left|\vec{AE}\right|\left|\cos\theta\right| = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}\times\vec{AD})\cdot\vec{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE}]\right|$$

Exemplo 2:

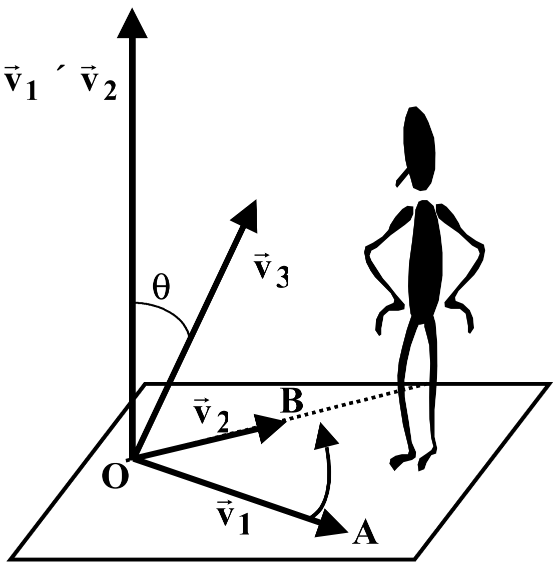
Consideremos o paralelepípedo de arestas OA, OB e OC, onde $\vec{OA} = (1,0,2)$, $\vec{OB} = (1,1,3)$ e $\vec{OC} = (2,1,0)$. O volume V deste paralelepípedo pode ser calculado como:

$$V = \left|[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]\right| = \left|(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}\right| = |(-2,-1,-1)\cdot(2,1,0)| = 5\ \text{u. v.}$$

E a altura do mesmo em relação à base OABD será:

$$h = \left|\ \text{proj}_{\vec{OA}\times\vec{OB}}\ \vec{OC}\right| = \left|(2,1,0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}\ \text{u.c.}\ .$$

Observação: Consideremos uma base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ do espaço. Pela definição do produto vetorial a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_1\times\vec{v}_2\}$ é positiva. Assim, se $\vec{v}_3$ estiver no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será também positiva, já que o observador não muda de posição. Caso contrário a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será negativa.



Podemos verificar se $\vec{v}_3$ está, ou não, no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, através do

ângulo entre estes vetores. Ou seja, se este ângulo for agudo, então $\vec{v}_3$ está no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, caso contrário, não.
Por outro lado, para determinarmos se o ângulo entre dois vetores é agudo ou obtuso, basta calcularmos o produto escalar entre eles. Assim, $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 > 0$, temos que o ângulo entre estes vetores é agudo, logo a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será positiva, caso contrário, a base será negativa.
Podemos então concluir que uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é positiva se o produto misto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] > 0$ e será negativa se $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] < 0$.

Propriedades do produto misto

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.

4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$.

6. $t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\,\vec{w}]$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real. Faremos a seguir suas provas:

1. "$\Rightarrow$" Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, é zero. Assim, esse paralelepípedo é degenerado, e portanto, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

   "$\Leftarrow$" É imediata.

2. Temos que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]|$, como volume de um mesmo paralelepípedo. Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L D, então

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]| = 0$$

Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L I, então as bases $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ e $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ pertencem a mesma classe. Logo,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$$

Nas provas das propriedades seguintes, usaremos as propriedades dos produtos escalar e vetorial já vistas.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = -[(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

2. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Usaremos agora as propriedades acima para demonstrar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de vetores, ou seja:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} .$$

Mostraremos que : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{o}$.

Considerando $\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \{\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})\} \\
&= \vec{a} \cdot [\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})] - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}.
\end{aligned}$$

Portanto $\vec{a} = \vec{o}$.

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} = \{\vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} =$
$= (\vec{u}_1 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u}_2 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

6. $[t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (t\,\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times t\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}].$

Analogamente podemos obter as outras igualdades.

Expressão cartesiana do produto misto

Fixada uma base ortornomal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3)$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3$$

Assim, podemos escrever:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma do determinante:

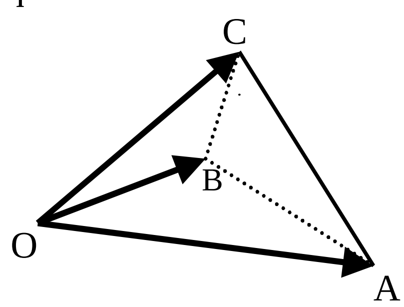
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3:

Do tetraedro de arestas OA, OB, e OC, sabemos que :

$\vec{OA} = (x,3,4)$, $\vec{OB} = (0,4,2)$ e $\vec{OC} = (1,3,2)$.

Calcule o valor de x, para que o volume desse tetraedro seja igual a 2 u. v.



Sabemos que o volume V_T do tetraedro é dado por:

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|$$

Assim,

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2x - 10|.$$

Como V_T = 2 u.v, temos: $\frac{1}{6} |2x - 10| = 2$.

Logo, x = 11 ou $x = -1$.